

数 学 (120 分)

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A，数学B

2020年2月25日

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は7ページあります。2ページ目と3ページ目は白紙です。
試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合には，手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答用紙は4枚です。解答はすべて解答用紙の所定の場所に，途中経過も含めて記入しなさい。解答用紙は裏面も使用できます。
- 4 下書用紙は2枚です。
- 5 受験番号は，すべての解答用紙の所定の欄(2か所)に必ず記入しなさい。
- 6 試験終了後は，解答用紙の上にある白ぬきの番号の順に並べなさい。
- 7 配付した解答用紙は持ち出してはいけません。
- 8 問題冊子と下書用紙は持ち帰りなさい。

第1問 (80点)

問1 x の関数 y が、 t を媒介変数として次の式で表されるとき、導関数 $\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

問2 次の不定積分、定積分を求めよ。

(1) $\int x \cdot 3^{2x} dx$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos 3x| dx$

問3 7進法で $114_{(7)}$ と表された数を3進法で表せ。

第2問 (70点)

問1 2次方程式 $x^2 - 3x + 4 = 0$ の解を α, β とし, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \alpha^n + \beta^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。

- (1) a_1, a_2 の値を求めよ。
- (2) n を 2 以上の自然数とするとき,

$$a_{n+1} - 3a_n + 4a_{n-1} = 0$$

が成り立つことを示せ。

- (3) すべての自然数 n について, a_n は奇数であることを示せ。

問2 (1) 方程式 $z^6 + 1 = 0$ を解き, 解が表す点を複素数平面上に図示せよ。

- (2) 整式 $x^6 + 1$ を実数の範囲で因数分解せよ。

第3問 (80点)

一辺の長さが1である正四面体OABCにおいて、辺ABの中点をMとする。また、 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とし、辺BCを $t:(1-t)$ の比に内分する点をPとする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくとき、次の問いに答えよ。

問1 \overrightarrow{OM} と \overrightarrow{OP} をそれぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} と t を用いて表せ。

問2 $|\overrightarrow{OP}|$ を t を用いて表せ。

問3 $\angle MOP = \frac{\pi}{4}$ となるときの t の値を求めよ。

第4問 (70点)

関数 $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$) について、次の問いに答えよ。

問1 関数 $f(x)$ の増減、極値と、曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べよ。

問2 点 $(a, 0)$ から曲線 $y = f(x)$ に対して接線を引くことができるような定数 a の値の範囲を定めよ。

問3 定積分 $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^3} dx$ を求めよ。