数　　　学　（120分）

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A，数学B

2021年3月12日

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまでは，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　この問題冊子は**6**ページあります。

試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合には，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　**第1問の問1は選択問題です。(a), (b) のうち選択した問題の記号を1つだけ解答用紙の所定の欄に記入しなさい。選択問題において，所定の欄に記号の記入のない場合や選択していない問題を解答した場合は無効です。**

第1問の問2以降は必答問題です。すべて解答しなさい。

4　解答用紙は**4**枚です。**解答はすべて解答用紙の所定の場所に，途中経過も含めて記入しなさい。**解答用紙は裏面も使用できます。

5　解答用紙とは別に，下書用紙が**2**枚あります。必要に応じて自由に使用しなさい。

6　**受験番号は，すべての解答用紙の所定の欄（2か所）に必ず記入しなさい。**

7　**試験終了後は，解答用紙の上にある白ぬきの番号の順に並べなさい。**

8　配付した解答用紙は持ち出してはいけません。

9　試験終了後，問題冊子と下書用紙は持ち帰りなさい。

このページは空白である。

第1問 (100点)

問1 (選択問題) 次の(a), (b)のいずれか一方を選択して解答せよ。なお，解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

(a) $\alpha = \cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi$ とするとき，α^5 および $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha$ の値をそれぞれ求めよ。

(b) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ。

問2 次の関数の導関数を求めよ。

$$y=\frac{e^{2x}}{1+\sin x}$$

問3 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\log 3}\frac{1}{e^{-x}+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$

問4 実数 a に対して，a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。$[\log_3 n]=4$ を満たす整数 n の個数を求めよ。

第2問 (100点)

問1 実数 x, y に対して $|x|+|y| \geqq |x-y|$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

問2 1, 2, 3 の各数字が 1 つずつ書かれた 3 枚のカードが入った箱がある。この箱の中から無作為に 1 枚を取り出し，数字を見てから箱の中に戻すという試行を繰り返す。同じ数字を 3 回続けて取り出したら，試行を終了するものとする。

(1) 試行が 3 回で終了する確率を求めよ。

(2) 試行が 4 回以内で終了する確率を求めよ。

(3) 試行を 6 回行っても終了しない確率を求めよ。

第3問 (100点)

1辺の長さが1の正方形OABCについて，m を $0<m<1$ を満たす実数とし，辺CBを $m:(1-m)$ に内分する点をDとする。また，直線OD上に点Eを，直線ODと直線AEが垂直となるようにとる。次の問いに答えよ。

問1 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, m$ を用いて表せ。

問2 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, m$ を用いて表せ。

問3 $|\overrightarrow{\mathrm{EB}}|=1$ となるときの m の値を求めよ。

問4 $\cos\angle\mathrm{AEB}$ を m を用いて表し，$\angle\mathrm{AEB}=\dfrac{\pi}{3}$ となるときの m の値を求めよ。

第4問 (100点)

関数 $f(x)=2\log(x+1)-\log x \quad (x>0)$ について，次の問いに答えよ。

問 1 関数 $f(x)$ の極値，増減と，曲線 $y=f(x)$ の変曲点，凹凸を調べよ。

問 2 極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を調べよ。

問 3 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\left(2, \log\dfrac{9}{2}\right)$ における接線を ℓ とする。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) $x \geqq 1$ において，直線 $x=1$, 接線 ℓ と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。