

数 学

(120分)

数学Ⅰ, 数学Ⅱ, 数学Ⅲ, 数学A, 数学B

2022年3月12日

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は**6**ページあります。
試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合には、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答用紙は**4**枚です。解答はすべて解答用紙の所定の場所に、途中経過も含めて記入しなさい。解答用紙は裏面も使用できます。
- 4 受験番号は、すべての解答用紙の所定の欄（2か所）に必ず記入しなさい。
- 5 試験終了後は、解答用紙の上にある白ぬきの番号の順に並べなさい。
- 6 配付した解答用紙は持ち出してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

このページは空白である。

第1問 (100点)

問1 平面上のベクトル \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} が $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$, $3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ を満たすとき, $|\vec{a} + \vec{b}|$ の値を求めよ。

問2 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^8 \sqrt[3]{|x|} dx$

(2) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} dx$

問3 次の無限級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2x^2 + 3x - 1)^n$$

第2問 (100点)

問1 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = 3^n + 7^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定める。

- (1) a_1, a_2, a_3 の値を求めよ。
- (2) すべての正の整数 n について、 a_n は偶数であることを証明せよ。
- (3) n が奇数であるとき、 a_n は10で割り切れることを証明せよ。

問2 極方程式 $r = \frac{3}{2 - \cos \theta}$ により表される曲線 C について、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C を直交座標の x, y の方程式で表せ。
- (2) (1) で求めた方程式は、放物線、楕円、双曲線のいずれを表すか。また、その焦点の座標を求めよ。

第3問 (100点)

ある機械に1つのボタンと3つの電球A, B, Cがついている。ボタンを1回押すたびに、消えている電球は $\frac{1}{2}$ の確率で点灯し、点灯している電球は $\frac{1}{3}$ の確率で消える。ただし、A, B, Cはそれぞれ独立に点灯したり消えたりする。最初はAとBが点灯しており、Cが消えているとして、次の問いに答えよ。

問1 ボタンを1回押したあとで、BとCが点灯しAが消えている確率を求めよ。

問2 n を正の整数とし、ボタンを n 回押したあとで、Aが点灯している確率を p_n とする。

(1) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(2) p_n を求めよ。

問3 n を正の整数とし、ボタンを n 回押したあとでAとBが点灯しCが消えている確率を r_n とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ を求めよ。

第4問 (100点)

関数 $f(x) = e^{-x} - 2x$ について、次の問いに答えよ。

問1 関数 $f(x)$ は常に減少していることを示せ。

問2 定積分 $\int_0^1 f(x) dx$ を求めよ。

問3 $0 < x < 1$ の範囲に $f(x) = 0$ となる x が1つだけ存在することを示せ。必要であれば、 $2 < e < 3$ であることを用いてもよい。

問4 曲線 $y = f(x)$, x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積を S_1 とし、曲線 $y = f(x)$, x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれた部分の面積を S_2 とするとき、 $S_1 < S_2$ であることを示せ。

問5 $x \leq 0$ において、曲線 $y = f(x)$ と x 軸, y 軸および直線 $x = -1$ で囲まれた部分が x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。