数　　　学　（120 分）

数学 I，数学 II，数学 III，数学 A，数学 B

2021 年 2 月 25 日

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまでは，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　この問題冊子は **6** ページあります。

試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合には，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　**第 1 問の問 1 は選択問題です。(a), (b)** のうち選択した問題の記号を 1 つだけ解答用紙の所定の欄に記入しなさい。選択問題において，所定の欄に記号の記入のない場合や選択していない問題を解答した場合は無効です。

第 1 問の問 2 以降は必答問題です。すべて解答しなさい。

4　解答用紙は **4 枚**です。**解答はすべて解答用紙の所定の場所に，途中経過も含めて**記入しなさい。解答用紙は裏面も使用できます。

5　解答用紙とは別に，下書用紙が **2 枚**あります。必要に応じて自由に使用しなさい。

6　**受験番号は，すべての解答用紙の所定の欄（2 か所）に必ず記入しなさい。**

7　試験終了後は，**解答用紙の上にある白ぬきの番号の順に並べ**なさい。

8　配付した解答用紙は持ち出してはいけません。

9　試験終了後，問題冊子と下書用紙は持ち帰りなさい。

このページは空白である。

第1問 (100点)

問 1 (選択問題) 次の (a), (b) のいずれか一方を選択して解答せよ。なお，解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

(a) 平面上で，双曲線 $x^2 - 2y^2 = 18$ と直線 $y = x + k$ が異なる 2 点で交わるような定数 k の値の範囲を求めよ。

(b) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\cdots\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$$

問 2 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n)$$

問 3 次の不定積分，定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (x+1)e^{-3x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

第2問 (90点)

問1 複素数平面上の3点A(α), B($3-2i$), C($1+2i$) を頂点とする三角形が，正三角形であるとき，α の値を求めよ。

問2 $a_1=1,\ a_{n+1}=(n+1)!+na_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で表される数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1) $a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ を求めよ。

(2) 一般項 a_n を推測し，それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

第3問　(100点)

関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$ について，次の問いに答えよ。

問 1　導関数 $f'(x)$ を求めよ。

問 2　関数 $f(x)$ の増減，極値を調べよ。

問 3　(1)　$x - 2 = \tan\theta$ とおくとき，$x^2 - 4x + 5$ を θ を用いて表せ。

(2)　曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

第4問 (110点)

何桁(けた)かの暗証番号を，以下の方法で別の番号に暗号化することを考える。

(*)　暗証番号の各桁の数字 m $(0 \leqq m \leqq 9)$ に対し，m の暗号化後の数字 c を，m^7 を 10 で割った余りとする。

たとえば $m=1$ のとき，$m^7=1$ であるから $c=1$ となり，$m=2$ のとき，$m^7=128$ であるから $c=8$ となる。したがって,「12」という 2 桁の暗証番号を暗号化すると「18」となる。

問 1　(1)　$2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ を 10 で割った余りをそれぞれ求めよ。

(2)　2^{21} を 10 で割った余りを求めよ。

問 2　a_1, a_2 を整数とするとき，a_1 を 10 で割った余りを r_1，a_2 を 10 で割った余りを r_2 とすると,「a_1 と a_2 の積を 10 で割った余り」は「r_1 と r_2 の積を 10 で割った余り」に等しくなることを示せ。

問 3　整数 a に対して,「a^5 を 10 で割った余り」は「a を 10 で割った余り」に等しくなることを示せ。

問 4　「267」という暗証番号を，上の方法 (*) で暗号化せよ。さらに，暗号化した番号の各桁の数字を 3 乗し，それぞれ 10 で割った余りを求めると元の暗証番号「267」に戻ることを確かめよ。

問 5　上の方法 (*) で暗号化した数字 c を 3 乗し，10 で割った余りを求めると元の数字 m に戻ることを示せ。