

# 数 学

(120分)

数学Ⅰ, 数学Ⅱ, 数学Ⅲ, 数学A, 数学B

2022年2月25日

## 注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は**6**ページあります。  
試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合には、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答用紙は**4**枚です。解答はすべて解答用紙の所定の場所に、途中経過も含めて記入しなさい。解答用紙は裏面も使用できます。
- 4 受験番号は、すべての解答用紙の所定の欄（**2**か所）に必ず記入しなさい。
- 5 試験終了後は、解答用紙の上にある白ぬきの番号の順に並べなさい。
- 6 配付した解答用紙は持ち出してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

このページは空白である。

**第1問** (100点)

問1 3進数  $12010_{(3)}$  を4進法で表せ。

問2 不等式  $x < -\sqrt{x+6}$  を解け。

問3 次の定積分, 不定積分を求めよ。

(1)  $\int_2^3 \frac{x-2}{x^2-x} dx$

(2)  $\int 2x^3 e^{x^2} dx$

問4  $|\alpha| = |\beta| = 1$  かつ  $\alpha + \beta = 1$  を満たす複素数  $\alpha, \beta$  について,  $\alpha^2 + \beta^2$  の値を求めよ。

## 第2問 (100点)

問1 四面体OABCは、 $OA = 2$ ,  $OB = 3$ ,  $OC = 2$ ,  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle BOC = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle COA = \frac{\pi}{3}$ を満たす。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c}$ ,  $\vec{c} \cdot \vec{a}$  の値をそれぞれ求めよ。

(2) 点Oから平面ABCに下ろした垂線と平面ABCの交点をPとする。 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ を用いて表せ。また、線分OPの長さを求めよ。

問2  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。また、等号が成り立つときを調べよ。

(1)  $(x+9y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 16$

(2)  $x+y+z \geq \sqrt{3(xy+yz+zx)}$

**第3問** (100点)

関数  $f(x) = \frac{\sin x}{(7+2\cos x)^2}$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) について、次の問いに答えよ。

問1 導関数  $f'(x)$  を求めよ。

問2 関数  $f(x)$  の増減を調べよ。また、 $f(x)$  の最大値、最小値を求めよ。

問3 曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

## 第4問 (100点)

「塵劫記」という江戸時代の和算の書物に、「ねずみ算」についての記述がある。ここでは、塵劫記から数値を変えた次のようなねずみ算を考える。

- (\*) はじめに、ネズミのつがいが1組いる。つがいは1ヶ月後に6匹の子を産む。産まれる子は雌雄同数とし、親のネズミと合わせた計4組のつがいが、さらに1ヶ月後にそれぞれ6匹の子を産む。このようにして、1ヶ月経過するごとにどの世代のネズミのつがいもそれぞれ6匹ずつ雌雄同数の子を産む。ただし、ネズミが死亡することはないとする。

はじめから  $n$  ヶ月後のネズミの総数を  $a_n$  とするとき、次の問いに答えよ。

問1  $a_1, a_2, a_3$  をそれぞれ求めよ。

問2  $a_{n+1} - a_n$  を  $a_n$  を用いて表せ。ただし、 $n$  は正の整数とする。

問3 ネズミの総数が2,000,000以上となる最小の整数  $n$  を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$  とする。

次に、(\*)とは別のねずみ算を考える。はじめにつがいが5組いて、それぞれのつがいが1ヶ月後に4匹ずつ子を産む。産まれる子は雌雄同数とする。その後も1ヶ月経過するごとに、どの世代のネズミのつがいもそれぞれ4匹ずつ雌雄同数の子を産む。はじめから  $n$  ヶ月後のネズミの総数を  $b_n$  とする。

問4 一般項  $b_n$  を求めよ。

問5  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n}$  を求めよ。